Vektorfunktioner
– kurvelængde og areal

I dette tillæg ser skal vi se på en formel for længden af banekurven for en vektorfunktion i planen. Vi skal desuden se, hvordan man kan bestemme arealet af det område, som stedvektoren overstryger. For at det ikke skal blive for tungt, vil vi ikke føre strengt bevis for sætningerne, kun antyde idéerne i et bevis. I det følgende har vi givet en differentiabel vektorfunktion med koordinatfunktionerne $x(t)$ og $y(t)$:

(1) $$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

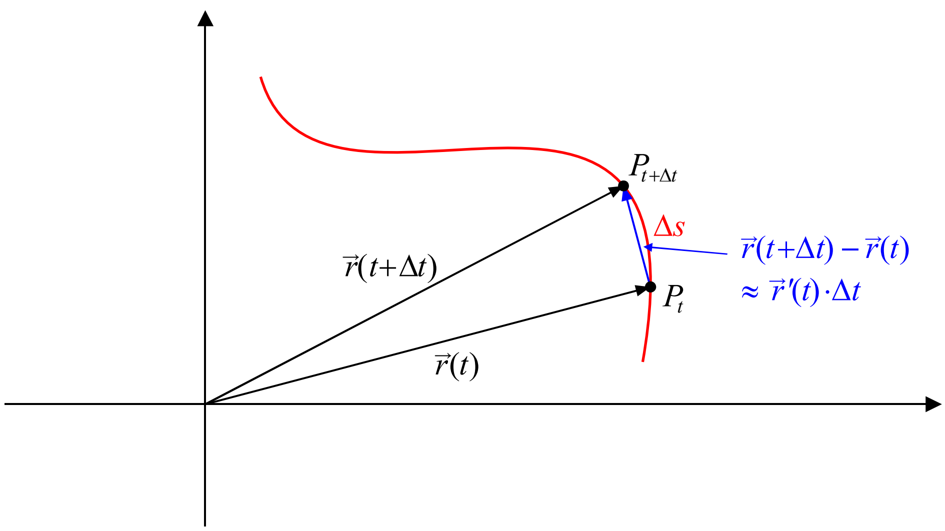
Man har da følgende:

Sætning 1 (Kurvelængde)

Lad $\vec{r}(t)$ være en vektorfunktion, som er kontinuert differentiabel i et interval I. Lad $a, b \in I$. Banekurven fra $t = a$ til $t = b$ kan da tildeles en *længde*, og den fås ved at integrere *farten* fra a til b:

(2) $$s = \int_a^b \left|\vec{r}\,'(t)\right| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\; dt$$

Bevis: Betragt punkterne P_t og $P_{t+\Delta t}$ på banekurven til henholdsvis tidspunkterne t og $t+\Delta t$. Længden af det lille stykke af banekurven, som ligger mellem de to punkter, er omtrent lig med længden af vektoren mellem de to punkter, altså $\left|\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\right|$, når Δt er lille. Det fremgår umiddelbart af figuren:



Da vektorfunktionen er antaget at være differentiabel for ethvert fast t i definitionsmængden, har vi for Δt lille:

$$(3) \qquad \vec{r}\,'(t) \approx \frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t) \approx \vec{r}\,'(t)\cdot \Delta t$$

Dermed haves for Δt lille og positiv: $\Delta s \approx \left|\vec{r}\,'(t)\cdot\Delta t\right| = \left|\vec{r}\,'(t)\right|\cdot\Delta t$. Når vi herefter integrerer fra $t=a$ til $t=b$, får vi derfor (2).

□

Eksempel 2 (Kardioiden - på engelsk Cardioid)

Kardioiden har parameterfremstillingen:

$$(4) \qquad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cdot\cos(t)-\cos(2t) \\ 2\cdot\sin(t)-\sin(2t) \end{pmatrix} \;,\; t\in[0,2\pi]$$

Hastighedsvektoren giver med anvendelse af differentiation af sammensat funktion:

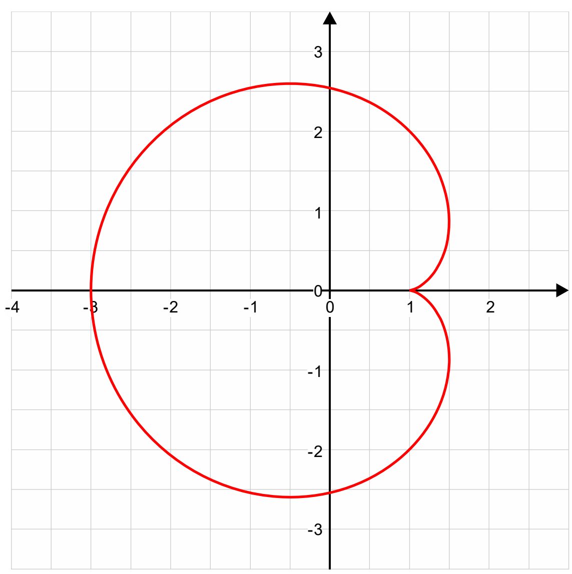
$$(5) \qquad \vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} -2\cdot\sin(t)+2\cdot\sin(2t) \\ 2\cdot\cos(t)-2\cdot\cos(2t) \end{pmatrix}$$

og der fås følgende udtryk for farten, idet vi dog ikke giver detaljerne i de trigonometriske omskrivninger (alternativt kan man benytte et CAS-værdtøj):

$$(6) \qquad \begin{aligned} \left|\vec{r}\,'(t)\right| &= \sqrt{\left(-2\cdot\sin(t)+2\cdot\sin(2t)\right)^2+\left(2\cdot\cos(t)-2\cdot\cos(2t)\right)^2} \\ &= \ldots \\ &= \sqrt{16\cdot\sin^2(\tfrac{1}{2}t)} \\ &= 4\cdot\sin(\tfrac{1}{2}t) \end{aligned}$$

Dermed fås kurvelængden til:

$$(7) \qquad s = \int_0^{2\pi} 4\cdot\sin(\tfrac{1}{2}t)\,dt = \left[-8\cdot\cos(\tfrac{1}{2}t)\right]_0^{2\pi} = \left(-8\cdot\cos(\tfrac{1}{2}\cdot 2\pi)\right)-\left(-8\cdot\cos(\tfrac{1}{2}\cdot 0\right) = 16$$



Sætning 3 (Overstrøget areal)

Lad $\vec{r}(t)$ være en vektorfunktion, som er kontinuert differentiabel i et interval *I*. Lad $a, b \in I$. Det areal, som radiusvektor *overstryger med fortegn*, når *t* løber fra *a* til *b*, er lig med:

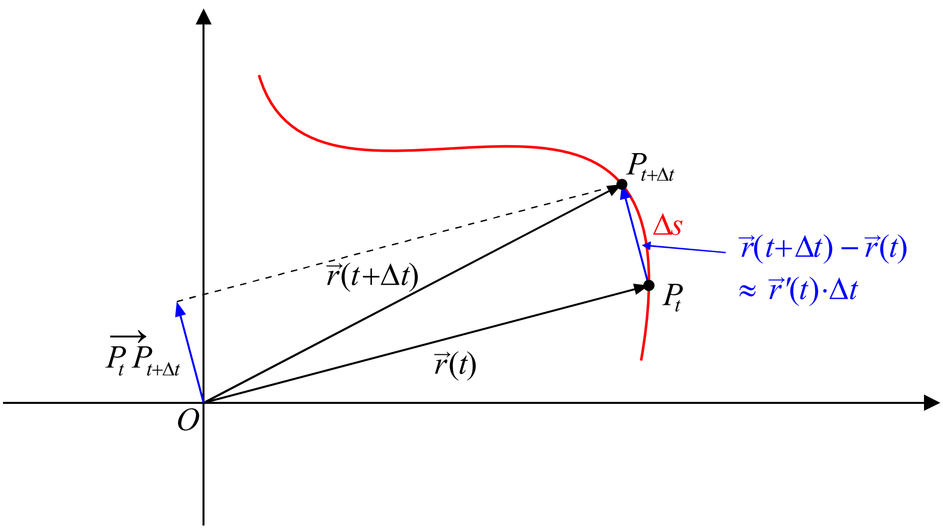
$$\frac{1}{2}\int_a^b \widehat{\vec{r}(t)} \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt \tag{8}$$

Her er arealet positivt, hvis radiusvektor drejer i positiv omløbsretning (mod uret), mens det er negativt, når radiusvektor drejer i negativ omløbsretning (med uret).

Bevis:
Det overstrøgne areal i det lille tidsrum fra *t* til $t+\Delta t$ er omtrent lig med halvdelen af arealet af parallelogrammet udspændt af vektorerne $\vec{r}(t)$ og $\overrightarrow{P_t P_{t+\Delta t}}$. Sidstnævnte er igen omtrent lig med $\vec{r}\,'(t)\cdot\Delta t$, når Δt er lille. Vi ved desuden, at arealet af parallelogrammet er den numeriske værdi af determinanten. Vi har altså:

$$\begin{aligned} \Delta A &\approx \tfrac{1}{2}\cdot\left|\det\left(\vec{r}(t), \overrightarrow{P_t P_{t+\Delta t}}\right)\right| \\ &\approx \tfrac{1}{2}\cdot\left|\det\left(\vec{r}(t), \vec{r}\,'(t)\cdot\Delta t\right)\right| \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\left|\det\left(\vec{r}(t), \vec{r}\,'(t)\right)\right|\cdot\Delta t \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\left|\hat{\vec{r}}(t)\cdot\vec{r}\,'(t)\right|\cdot\Delta t \end{aligned} \tag{9}$$

for positiv Δt . I linje 4 har vi udnyttet, at determinanten er defineret ud fra skalarproduktet på følgende måde: $\det(\vec{a},\vec{b}) = \hat{\vec{a}}\cdot\vec{b}$. Man kan desuden argumentere for, at "indmaden" under numerisk-tegnet er positivt, når radiusvektor drejer i positiv omløbsretning og negativ, når den drejer i negativ omløbsretning i det lille tidsrum Δt . Det hænger sammen med egenskaber for determinanten. Når vi herefter integrerer fra $t = a$ til $t = b$, får vi derfor (8), hvis vi altså regner arealer med fortegn, som nævnt.



□

Eksempel 4 (Kardioidens areal)

Vi betragter igen Kardioiden fra eksempel 2, og vi udnytter i den forbindelse (4) og (5) for at regne på integranden:

$$
\begin{aligned}
\hat{\vec{r}}(t)\cdot\vec{r}\,'(t) &= \widehat{\begin{pmatrix} 2\cdot\cos(t)-\cos(2t) \\ 2\cdot\sin(t)-\sin(2t) \end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix} -2\cdot\sin(t)+2\cdot\sin(2t) \\ 2\cdot\cos(t)-2\cdot\cos(2t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\left(2\cdot\sin(t)-\sin(2t)\right) \\ 2\cdot\cos(t)-\cos(2t) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2\cdot\sin(t)+2\cdot\sin(2t) \\ 2\cdot\cos(t)-2\cdot\cos(2t) \end{pmatrix} \\
&= \ldots \\
&= 6-6\cdot\cos(t)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

hvor vi sparer læseren for de indviklede regninger og brug af trigonometriske formler. Et CAS-værktøj vil kunne give svaret. Vi integrerer herefter:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\int_a^b \widehat{\vec{r}(t)}\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt &= \tfrac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi} 6-6\cdot\cos(t)\,dt \\
&= \tfrac{1}{2}\cdot\left[6t-6\cdot\sin(t)\right]_0^{2\pi} \\
&= \tfrac{1}{2}\cdot\left(\left(6\cdot 2\pi-6\cdot\sin(2\pi)\right)-(6\cdot 0-6\cdot\sin(0)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\cdot 12\pi \\
&= 6\pi \\
&\approx 18.850
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Vi bemærker, at radiusvektor hele tiden drejer i positiv omløbsretning, således, at integranden hele tiden er positiv. I næste eksempel skal vi se, hvilken fordel det er, at arealer regnes med fortegn …

□

Eksempel 5 (En forskudt cirkel)

Lad os kigge på en cirkel med radius 1, som er forskudt lidt i forhold til (0,0). Cirklen skal have centrum i (3,2). En mulig parameterfremstilling er følgende:

$$
\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+\cos(t) \\ 2+\sin(t) \end{pmatrix}
\tag{12}
$$

Heraf fås:

$$
\hat{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -2-\sin(t) \\ 3+\cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}
\tag{13}
$$

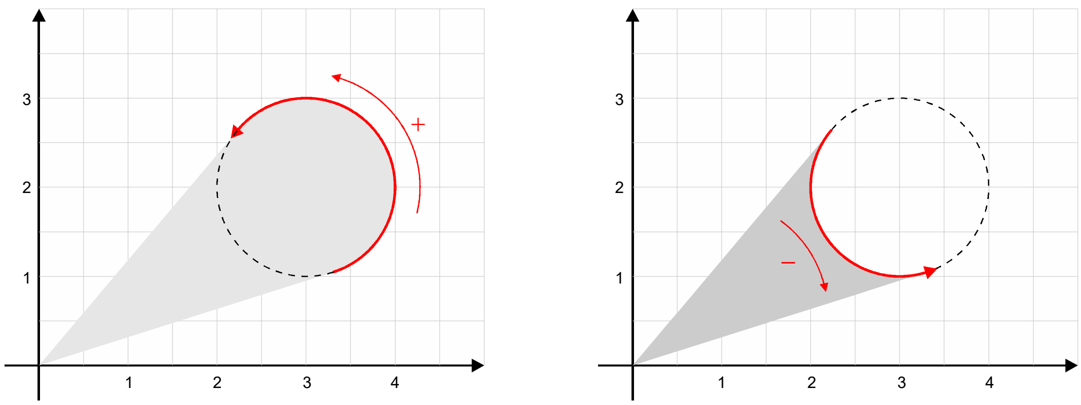
Vi kan herefter udregne integranden i formlen for arealet af det overstrøgne areal, regnet med fortegn:

(14)
$$\begin{aligned}\hat{\vec{r}}(t)\cdot\vec{r}\,'(t) &= \begin{pmatrix}-2-\sin(t)\\ 3+\cos(t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}\\ &= \big(-2-\sin(t)\big)\cdot\big(-\sin(t)\big)+\big(3+\cos(t)\big)\cdot\cos(t)\\ &= 2\cdot\sin(t)+\sin^2(t)+3\cdot\cos(t)+\cos^2(t)\\ &= 1+2\cdot\sin(t)+3\cdot\cos(t)\end{aligned}$$

hvor vi i 4. lighedstegn har benyttet den såkaldte "idiotformel": $\cos^2(t)+\sin^2(t)=1$. Integralet for arealet bliver dermed:

(15)
$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_a^b \widehat{\vec{r}(t)}\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt &= \tfrac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\big(1+2\cdot\sin(t)+3\cdot\cos(t)\big)\,dt\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\big[\,t-2\cdot\cos(t)+3\cdot\sin(t)\big]_0^{2\pi}\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\Big(\big(2\pi-2\cdot\cos(2\pi)+3\cdot\sin(2\pi)\big)-(0-2\cdot\cos(0)+3\cdot\sin(0)\Big)\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\Big(\big(2\pi-2+0\big)-\big(0-2+0\big)\Big)\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot 2\pi\\ &= \pi\end{aligned}$$

Det er altså netop arealet af en cirkel med radius 1: $\pi\cdot r^2=\pi\cdot 1^2=\pi$. Lad os se på logikken her, hvor arealer regnes med fortegn:



På venstre figur betragter vi et t-interval, hvor den vinkel, som radiusvektor danner med x-aksen, vokser. Det overstrøgne areal regnes altså positivt. På figuren til højre er vi i et t-interval, hvor radiusvektors vinkel i forhold til x-aksen reduceres. Derfor regnes det overstrøgne areal negativt! Alt i alt får vi arealet begrænset af den lukkede banekurve: Arealet af det lysegrå område minus arealet af det mørkegrå område er netop lig med arealet begrænset af den lukkede kurve, altså cirklen!

NB! Gennemløbes kurven i den modsatte retning, giver formel (8) i sætning 3 den samme værdi, blot med modsat fortegn (overvej hvorfor?)

Opgaver

I alle opgaver må der benyttes CAS-værktøj.

Opgave 1 (kurvelængde)

Betragt vektorfunktionen med parameterfremstilling

(16) $$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2-3 \\ -t^3+4t-3 \end{pmatrix} \quad , t \in [-2{,}5 ; 2{,}5]$$

a) Tegn banekurven i vinduet givet ved $-5 \leq x \leq 5$ og $-10 \leq y \leq 5$. Husk at skalere ens på akserne!

b) Bestem længden af banekurven. Prøv desuden at vurdere ud fra banekurven fra a), om resultatet ser rimeligt ud.

Opgave 2 (Areal)

Betragt samme vektorfunktion som i opgave 1. Banekurven afsnører et lukket område. Vi skal have bestem arealet af det, men først skal det tilhørende interval for parameterværdien t bestemmes, altså det, som betyder at radiusvektor gennemløber randen af den lukkede kurve.

a) Vis, at dobbeltpunktet mødes til tidspunkterne $t=-2$ og $t=2$.

b) Tegn igen banekurven, men denne gang kun i intervallet $t \in [-2,2]$. Passer det med, at randen af det afsnørede lukkede område netop gennemløbes?

c) Bestem arealet af det lukkede område. NB! Hvis du får et negativt tal, kan du bare fjerne fortegnet, da formlen afhænger af omløbsretningen!

d) Vurder om resultatet ser rimeligt ud, ud fra din banekurve i b). Anvend evt. gitterlinjer (*gridlines*) for bedre at kunne vurdere det.

Opgave 3 (Ellipsen)

Betragt *ellipsen* med parameterfremstilling:

(17) $$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos(t) \\ 2 \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \quad , t \in [0, 2\pi]$$

a) Tegn banekurven og bestem længden af banekurven. Husk at skalere ens på akserne!

b) Bestem arealet af det lukkede område, som ellipsen afgrænser.

Betragt nu den generelle forskrift, hvor den *halve storakse* kaldes a og den *halve lilleakse* kaldes b:

(18) $$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(t) \\ b \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \quad , t \in [0, 2\pi]$$

c) Bestem en færdig formel for arealet af det område ellipsen afgrænser.

Opgave 4 ("Hvalen Hvalborg")

Betragt vektorfunktionen med parameterfremstilling:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cdot\cos(t)-\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \quad , t\in[0,2\pi] \tag{19}$$

a) Tegn banekurven og bestem længden af banekurven. Husk at skalere ens på akserne!

b) Vis, at punktet $P_0(1,0)$ er et *firdobbelt punkt* for vektorfunktionen i definitionsmængden $[0,2\pi]$. Bestem de fire værdier for *t*, hvor punktet rammes.

c) "Hvalen" består af tre lukkede områder. Bestem det samlede areal af disse. NB! Pas på, at arealet af hver af de lukkede områder har samme fortegn! Overvej, hvordan radiusvektor gennemløber banekurven!

Opgave 5 (Astroiden)

Betragt vektorfunktionen med parameterfremstilling:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix} \quad , t\in[0,2\pi] \tag{20}$$

a) Tegn banekurven for vektorfunktionen i området $-1\le x\le 1$ og $-1\le y\le 1$.
Husk at skalere ens på akserne! Beskriv udseendet med ord.

b) Bestem længden af banekurven.

c) Bestem arealet det lukkede område, som banekurven afgrænser.

Opgave 6 (Længden af grafen for en funktion)

Formlen for længden af grafen for en funktion med forskrift $f(x)$ i intervallet $[a,b]$ er givet ved følgende udtryk:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(f'(x)\right)^2+1}\ dx \tag{21}$$

a) Bevis formlen ved at udnytte sætning 2 samt kendsgerningen, at enhver funktion *f* kan repræsenteres som en vektorfunktion på formen:

$$\vec{r}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \tag{22}$$

b) Lad $f(x)=-0{,}5x^2+4x+5$. Benyt formel (21) til at bestemme længden af grafen for *f* i intervallet $-2\le x\le 10$. Tegn desuden grafen i dette interval og vurder, om dit resultat forekommer sandsynligt.